

การแยกตัวประกอบของพหุนาม

พหุนาม คือ นิพจน์ที่สร้างจากตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัวและค่าคงที่ โดยใช้การดำเนินการแค่ การบวก การลบ และการคูณ ตัวอย่างเช่น

นิพจน์ $y(2xz^3 - 4)x - 2 + (0.9x + z)y$ เป็นพหุนาม (เนื่องจาก z^3 เป็นการเขียนย่อ

จาก $z \cdot z \cdot z$) แต่นิพจน์ $\frac{1}{x^2 + 1}$ ไม่ใช่พหุนาม เนื่องจากมีการหาร เช่นเดียวกับ

นิพจน์ $(5 + y)^x$ เนื่องจากไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการคูณกันที่ไม่ขึ้นกับค่าของตัวแปร x ได้

การแยกตัวประกอบของพหุนาม คือ การเขียนพหุนามนั้นในรูปการคูณกันของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่าตั้งแต่สองพหุนามขึ้นไป หรือเขียนพหุนามที่กำหนดให้ในรูปที่ง่ายกว่า

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยวิธีทำเป็นผลต่างกำลังสอง

พหุนามดีกรีสอง คือ พหุนามที่เขียนได้ในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ และ x เป็นตัวแปร

จากสูตรการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสอง

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

เมื่อ A และ B เป็นพหุนาม

และตามที่เราศึกษาเรื่องกรณฑ์ที่สองทำให้เราทราบว่า $(\sqrt{a})^2 = a$ ดังนั้นการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองที่เป็นผลต่างของกำลังสองสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามได้

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 5$

$$\begin{aligned}x^2 - 5 &= x^2 - (\sqrt{5})^2 \\&= (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$$

ตัวอย่างที่2 จงแยกตัวประกอบของ $(x - 1)^2 - 6$

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 - 6 &= (x - 1)^2 - (\sqrt{6})^2 \\&= [(x - 1) + \sqrt{6}][(x - 1) - \sqrt{6}] \\&= (x - 1 + \sqrt{6})(x - 1 - \sqrt{6}) \\ \text{ดังนั้น } (x - 1)^2 - 6 &= (x - 1 + \sqrt{6})(x - 1 - \sqrt{6})\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่3 จงแยกตัวประกอบของ $32 - (x - 5)^2$

$$\begin{aligned}32 - (x - 5)^2 &= (\sqrt{32})^2 - (x - 5)^2 \\&= (4\sqrt{2})^2 - (x - 5)^2 \\&= [4\sqrt{2} + (x - 5)][4\sqrt{2} - (x - 5)] \\&= (4\sqrt{2} + x - 5)(4\sqrt{2} - x + 5) \\ \text{ดังนั้น } 32 - (x - 5)^2 &= (4\sqrt{2} + x - 5)(4\sqrt{2} - x + 5)\end{aligned}$$

ลองทำดู

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $9x^2 - 16 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

2. $1 - 81x^2 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

3. $x^2 - 9 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

4. $50 - 4x^2 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

5. $36 - 3x^2 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

6. $18x^2 - 27 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

7. $8x^2 - 121 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

8. $1 - 16x^2 = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $x^2 - 7$ =

2) $14 - x^2$ =

3) $50 - a^2$ =

4) $x^2 - \frac{14}{25}$ =

5) $\frac{16}{49}a^2 - 15$ =

6) $7x^2 - 21$ =

7) $(a - 3)^2 - 10$ =

8) $(3x - 2)^2 - 5$ =

9) $18 - (x - 1)^2$ =

10) $50 - (x + 4)^2$ =

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

สูตรการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

นอกจากจะใช้สูตรนี้ในการแยกตัวประกอบของพหุนามแล้ว ยังมีการใช้ความรู้เรื่องกำลังสองสมบูรณ์มาจัดรูปพหุนามใหม่แล้วแยกตัวประกอบ ซึ่งการแยกตัวประกอบโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์จะช่วยให้สามารถแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ เช่น $x^2 + 4x + 1$ สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$\begin{aligned}x^2 + 4x + 1 &= (x^2 + 4x + 4) - 4 + 1 \\&= (x + 2)^2 - 3 \\&= (x + 2)^2 - (\sqrt{3})^2 \\&= (x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่1 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + 14x + 49$

$$\begin{aligned}x^2 + 14x + 49 &= x^2 + 2(7)x + 7^2 \\&= (x+7)^2\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่2 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 4\sqrt{3}x + 12$

$$\begin{aligned}x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 &= x^2 + 2(2\sqrt{3})x + \sqrt{12} \\&= x^2 + 2(2\sqrt{3})x + (2\sqrt{3})^2 \\&= (x + 2\sqrt{3})^2\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 = (x + 2\sqrt{3})^2$$

ลองทำดู

1. ให้น้องๆ จัดพหุนามต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

1) $x^2 + 6x + 9 = \dots\dots\dots$

2) $y^2 - 14y + 49 = \dots\dots\dots$

3) $a^2 - 4ab + 4b^2 = \dots\dots\dots$

4) $4m^2 - 4m + 1 = \dots\dots\dots$

5) $100x^2 + 20x + 1 = \dots\dots\dots$

6) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \dots\dots\dots$

2. ให้น้องๆ เติมพจน์ที่หายไปลงในช่องว่างเพื่อให้พหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ แล้วแยกตัวประกอบ

1) $x^2 + \dots\dots\dots + 16 = \dots\dots\dots$

2) $9x^2 + \dots\dots\dots + 4 = \dots\dots\dots$

3) $\frac{4}{9}x^2 + \dots\dots\dots + \frac{1}{4} = \dots\dots\dots$

4) $4x^2 + \dots\dots\dots + 25 = \dots\dots\dots$

5) $m^2 + 6m + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

6) $m^2 - 9m + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

7) $4m^2 + 13m + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

8) $25m^2 + \frac{5}{2}m + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

9) $\dots\dots\dots + 15x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \dots\dots\dots$

10) $\dots\dots\dots - x + \frac{1}{4} = \dots\dots\dots$

3. ให้น้องๆ แยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

1. $x^2 + 6x + 5$

.....

.....

.....

.....

.....

2. $x^2 - 4x - 12$

.....

.....

.....

.....

.....

3. $x^2 + 4x + 1$

.....

.....

.....

.....

.....

4. $3x^2 + 13x - 30$

.....

.....

.....

.....

.....

5. $x^2 - 3x - 5$

.....

.....

.....

.....

.....

6. $x^2 - 7x + 4$

.....

.....

.....

.....

.....

$$7. 6x^2 - 18x + 3$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$9. -x^2 - 6x + 4$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$11. x^2 - 12x + 12$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$8. -x^2 + 9x + 12$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$10. x^2 - 6x - 4$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$12. 4x^2 - 8x - 4$$

.....

.....

.....

.....

.....

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกกำลังสาม

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

ทดสอบความเข้าใจ

$$(x+2)(x^2-2x+4) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$(x+4)(x^2-4x+16) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $y^3 + 64$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} y^3 + 64 &= y^3 + 4^3 \\ &= (y + 4)(y^2 - (4)(y) + 4^2) \\ &= (y + 4)(y^2 - 4y + 16) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } y^3 + 64 = (y + 4)(y^2 - 4y + 16)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $64a^3 + 125$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 64a^3 + 125 &= (4a)^3 + 5^3 \\ &= (4a + 5)[(4a)^2 - (4a)(5) + 5^2] \\ &= (4a + 5)(16a^2 - 20a + 25) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 64a^3 + 125 = (4a + 5)(16a^2 - 20a + 25)$$

ลองทำดู

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $a^3 + 8b^3$ =

.....

2) $x^3 + 216$ =

.....

3) $m^3 + (n + 1)^3$ =

.....

4) $8x^3 + (2x + 1)^3$ =

.....

5) $729 + (x - 4)^3$ =

.....

6) $(3x + 1)^3 + 125$ =

.....

7) $(m + n)^3 + 1,000$ =

.....

8) $(x + y)^3 + (x - y)^3$ =

.....

.....

9) $(2x + 3)^3 + (3x - 1)^3$ =

.....

.....

10) $(3x - 1)^3 + (x - 4)^3$ =

.....

.....

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างกำลังสาม

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

ทดสอบความเข้าใจ

$$(x-2)(x^2+2x+4) = \dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots$$

$$(x-4)(x^2+4x+16) = \dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $y^3 - 1$

วิธีทำ $y^3 - 1 = y^3 - 1^3$

$$= (y - 1)(y^2 + (y)(1) + 1^2)$$
$$= (y - 1)(y^2 + y + 1)$$

ดังนั้น $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $27 - b^3$

วิธีทำ $27 - b^3 = 3^3 - b^3$

$$= (3 - b)(3^2 + (3)(b) + b^2)$$
$$= (3 - b)(9 + 3b + b^2)$$

ดังนั้น $27 - b^3 = (3 - b)(9 + 3b + b^2)$

ลองทำดู

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $216 - a^3b^3$ =

.....

2) $64x^3 - 125y^3$ =

.....

3) $1,331^3 - x^3y^3z^3$ =

.....

4) $x^3y^3 - 512z^3$ =

.....

5) $1 - (a + b)^3$ =

.....

6) $x^3y^3z^3 - 1$ =

.....

7) $8x^3 - (2x + y)^3$ =

.....

8) $(3x - 1)^3 - 8$ =

.....

9) $(2x + 5)^3 - (2x - 1)^3$ =

.....

.....

10) $(7x - 2)^3 - (2x + 3)^3$ =

.....

.....

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่อยู่ในรูปแบบอื่นๆ

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสองในรูปแบบอื่นๆ อาจทำได้โดยจัดพหุนามนั้นให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ ผลต่างของกำลังสอง ผลบวกของกำลังสาม หรือผลต่างของกำลังสาม แล้วก็ใช้ความรู้ที่เคยเรียนมาแล้วในการแยกตัวประกอบต่อไปได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x &= (x^4 - 3x^3) - (4x^2 - 12x) \\ &= x^3(x - 3) - 4x(x - 3) \\ &= (x - 3)(x^3 - 4x) \\ &= (x - 3)(x)(x^2 - 4) \\ &= x(x - 3)(x - 2)(x + 2)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $64x^6 - 729$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad 64x^6 - 729 &= (8x^3)^2 - 27^2 \\ &= (8x^3 - 27)(8x^3 + 27) \\ &= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) \\ &= (2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 6x + 9)(4x^2 - 6x + 9)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $x^5 - 10x^3 + 9x$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad x^5 - 10x^3 + 9x &= x(x^4 - 10x^2 + 9) \\ &= x(x^2 - 9)(x^2 - 1) \\ &= x(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy - 96$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy - 96 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (4x + 4y) - 96 \\&= (x + y)^2 - 4(x + y) - 96 \\&= [(x + y) - 12][(x + y) + 8] \\&= (x + y - 12)(x + y + 8)\end{aligned}$$

ลองทำดู

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $n^4 - 13n^2 + 36$ =

2) $m^2 - 2mn + n^2 - 9$ =

3) $x^3y^6z^9 + 1$ =

4) $x^8 - 16$ =

5) $2 - 50m^2n^2$ =

6) $a^2 + 4b^2 - 16c^2 - 4ab$ =

$$7) \quad x^4 + 4 \quad = \quad \dots\dots\dots$$

.....

.....

$$8) \quad x^3 - 39x + 70 \quad = \quad \dots\dots\dots$$

.....

.....

$$9) \quad x^3 + x^2 - 10x + 8 \quad = \quad \dots\dots\dots$$

.....

.....

$$10) \quad 2x^3 - 5x^2 - x + 6 \quad = \quad \dots\dots\dots$$

.....

.....

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

ทฤษฎีเศษเหลือ

ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $x-a$ โดยที่ a เป็นค่าคงตัว จะได้เศษเหลือเป็น $P(a)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเศษจากการหาร $x^3 - 4x^2 - x - 3$ ด้วย $x - 4$

วิธีทำ จากทฤษฎีเศษเหลือ ถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $x - a$ เศษจะเท่ากับ $P(a)$

ดังนั้น ถ้าหาร $x^3 - 4x^2 - x - 3$ ด้วย $x - 4$ เศษจะเท่ากับ $P(4)$

$$\text{จาก} \quad P(x) = x^3 - 4x^2 - x - 3$$

$$\text{จะได้} \quad P(4) = 4^3 - 4(4)^2 - 4 - 3$$

$$= 64 - 64 - 4 - 3$$

$$= -7$$

ดังนั้น ถ้าหาร $x^3 - 4x^2 - x - 3$ ด้วย $x - 4$ จะเหลือเศษ $= -7$

พิสูจน์

$$x - 4 \overline{) x^3 - 4x^2 - x - 3}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเศษจากการหาร $-2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + 7$ ด้วย $x + 1$

วิธีทำ ให้ $P(x) = -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + 7$

$$x - a = x + 1 = x - (-1)$$

$$\text{ดังนั้น } a = -1$$

เศษจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x + 1$ คือ $P(-1)$

$$\begin{aligned}\therefore P(-1) &= -2(-1)^5 + 4(-1)^4 - 3(-1)^3 + 8(-1) + 7 \\ &= 2 + 4 + 3 - 8 + 7 \\ &= 8\end{aligned}$$

ดังนั้น เศษจากการหาร $-2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + 7$ ด้วย $x + 1$ คือ 8

พิสูจน์

$$x + 1 \overline{) -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + 7}$$

ในการแยกตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ เราจะต้องหาจำนวน a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ ก่อน

ในกรณีทั่วไป เมื่อ $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดเป็น 1 และ a เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $P(a) = 0$ จะได้ว่า a หารพจน์ที่เป็นค่าคงที่ของพหุนาม $P(x)$ ได้ลงตัว ดังนั้นการหาจำนวนเต็ม a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ เราจะพิจารณาจากจำนวนเต็มที่หารพจน์ที่เป็นค่าคงตัวของพหุนาม $P(x)$ ได้ลงตัว

ดังนั้นการแยกตัวประกอบของ $P(x)$ ซึ่งเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดเป็น 1 ได้โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ ซึ่งสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. หาจำนวนเต็ม a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ จะได้ว่า $x - a$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$
2. นำ $(x - a)$ ที่ได้จากข้อ 1 ไปหารพหุนาม $P(x)$ ได้ผลหารเป็นพหุนามใหม่ ($Q(x)$) ที่ไม่ซ้ำกับพหุนาม $P(x)$ และมีดีกรีน้อยกว่า $P(x)$ อยู่ 1 และได้ว่า $P(x) = (x - a)Q(x)$
3. ถ้า $Q(x)$ ที่ได้ในข้อ 2 เป็นพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่า 2 และสามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้ ก็แยกตัวประกอบของ $Q(x)$ โดยใช้วิธีตามข้อ 1 และข้อ 2 แต่ถ้า $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรีสองและสามารถแยกตัวประกอบได้ตามวิธีการที่เรียนมาแล้วก็ให้แยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 2x^2 - 2x + 12$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

วิธีทำ จากโจทย์ $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 12$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวคือ 12

จำนวนที่หาร 12 ได้ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$

พิจารณา $P(1), P(-1)$ จะได้ $P(1) \neq 0, P(-1) \neq 0$

พิจารณา $P(2) \neq 0$

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 2(-2) + 12$$

$$= (-8) - 8 + 4 + 12 = 0$$

ดังนั้น $x - (-2)$ หรือ $x + 2$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

นำ $x + 2$ ไปหาร $P(x)$ จะได้ผลหารคือ $x^2 - 4x + 6$

$$\text{จะได้ } P(x) = (x + 2)(x^2 - 4x + 6)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า k ที่ทำให้ $x - 5$ หาร $x^3 - 3x^2 + kx - 20$ ลงตัว

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 - 3x^2 + kx - 20$

ถ้า $x - 5$ หาร $P(x)$ ลงตัว แสดงว่า $P(5) = 0$

$$\text{หา } P(5) = 5^3 - 3(5)^2 + k(5) - 20$$

$$= 125 - 75 + 5k - 20$$

$$= 30 + 5k$$

$$\text{ดังนั้น } 30 + 5k = 0$$

$$5k = -30$$

$$k = -6$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า k ที่ทำให้ $x - 6$ หาร $x^3 - 8x^2 + 19x + k$ แล้วเหลือเศษ 15

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x + k$

ถ้า $x - 6$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 15

แสดงว่า $P(6) = 15$

$$\text{หา } P(6) = 6^3 - 8(6)^2 + 19(6) + k$$

$$= 216 - 288 + 114 + k$$

$$= 42 + k$$

$$\text{ดังนั้น } 42 + k = 15$$

$$k = 15 - 42 = -27$$

ลองทำดู

1. ให้น้องๆหาค่า $P(x)$ จาก $P(a)$ และ a ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 5, a = 2$

.....

2) $P(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 8, a = -3$

.....

3) $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x - 4, a = -1$

.....

4) $P(x) = -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 8x + 7, a = 4$

.....

5) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 12, a = -2$

.....

2. จงหาค่า k ที่ทำให้ $x - 2$ หาร $kx^3 - 3x^2 + 4x - 4$ ลงตัว

.....
.....

3. จงหาค่า k ที่ทำให้ $x - 3$ หาร $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - kx + 7$ เหลือเศษ -2

.....
.....

4. จงหาค่า t ที่ทำให้ $x + t$ หาร $x^2 + 5x - 2$ เหลือเศษ -8

.....
.....

5. จงหาเศษจากการหารต่อไปนี้

1) $x^3 - x^2 + 10x - 8$ หารด้วย $x - 3$

.....

2) $2x^3 - 4x^2 - 7x + 1$ หารด้วย $x - 1$

.....

3) $-2x^5 + 9x^4 + 19x^3 + 51x^2 - 89x + 30$ หารด้วย $x + 3$

.....

4) $9x^2 + 4x - 1$ หารด้วย $x - \frac{1}{2}$

.....

5) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ หารด้วย $x + 1$

.....

6. ให้น้องๆ แยกตัวประกอบของพหุนามในแต่ละข้อ โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

1.)



$$3x^3 + 5x^2 - 3x - 5$$

.....

.....

.....

.....

.....

2.)



$$2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$$

.....

.....

.....

.....

.....

3.)



$$x^3 + 4x^2 - 11x + 6$$

.....

.....

.....

.....

.....

4.)



$$x^3 + 7x^2 - x - 7$$

.....

.....

.....

.....

.....

5.)



$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$$

.....

.....

.....

.....

.....

6.)



$$2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$$

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบ

1. $x(x - 1)$

2. $x + (x - 1)$

3. $(x - 5)(x + 2) - x$

4. $x^3 - x^2 - 2x + 1$

2. ข้อใดเป็นจริง

1. $4x(y - 1) = 4x^2y - 4x$

2. $3x^2(y - 3) = 3x^2y - 9x^2$

3. $-3(2x - 3y) = 6y + 9x$

4. $-4x(x + 2) = -4x^2 + 8x$

3. ข้อใดต่อไปนี้^๕เป็นเท็จ

1. $7ab(2a - 5) = 14a^2b - 35ab$

2. $10a^4b - 15a^2b^2 = 5a^2b^2(2a^2 - 3)$

3. $-2a(a - b^2 + 4) = 2ab^2 - 2a^2 - 8a$

4. $5a^2b(2a - 3ab + 4c) = 10a^3b - 15a^3b^2 + 20a^2bc$

4. ข้อใดต่อไปนี้^๕ถูกต้อง

1. $(x + y) - 3b(x + y) = (x + y)(3b)$

2. $(x - y) + 5a(x - y) = (x + y)(5a)$

3. $3(x + y) + 4a(x + y) = (x + y)(3 + 4a)$

4. $5(x + y) - 3b(x + y) = (5x + 5y)(3ab - 36y)$

5. แยกตัวประกอบของ $a^2 + 6a - 91$ ได้เท่ากับข้อใด

1. $(a - 13)(a - 7)$

2. $(a - 13)(a + 7)$

3. $(a + 13)(a - 7)$

4. $(a + 13)(a + 7)$

6. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $98 - 7x - x^2$

1. $(14 - x)(7 - x)$

2. $(14 + x)(7 - x)$

3. $(14 + x)(7 + x)$

4. $(14 - x)(7 + x)$

7. $6x^2 - 11x - 10$ แยกตัวประกอบได้ดังนี้^๕

1. $(2x - 5)(3x + 2)$

2. $(2x + 5)(3x - 2)$

3. $(2x + 2)(3x - 5)$

4. $(2x - 2)(3x - 5)$

8. ถ้าแยกตัวประกอบของ $ax^2 + bx + c$ ได้เป็น $(4x - 7)(4x + 7)$ แล้วค่าของ a , b และ c มีค่าเท่าใด
1. $a = 16, b = 0, c = 49$
 2. $a = 16, b = 0, c = -49$
 3. $a = 16, b = -56, c = 49$
 4. $a = 16, b = 56, c = -49$
9. ถ้า $81x^2 - 18x + A$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์แล้ว จำนวน A มีค่าเท่ากับเท่าใด
1. 16
 2. 9
 3. 4
 4. 1
10. ถ้า $x^2 + kx + 6 = (x + 2)(x + 3)$ แล้ว k มีค่าเท่าใด
1. 2
 2. 3
 3. 5
 4. 6
11. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $a^2x + abx + ac + aby + b^2y + bc$
1. $(a + b)(a + bx + cy)$
 2. $(x + y)(a + b + c)$
 3. $(a + b)(ax + by + c)$
 4. $(a + x)(b + c + y)$
12. ข้อใดเป็นตัวประกอบของ $3x^3 - x^2 - 18x + 6$
1. $3x - 1$
 2. $x + 6$
 3. $3x - 2$
 4. $x - 6$
13. ถ้า $(x + 1)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $x^3 + 2x^2 - x - 2$ แล้ว ตัวประกอบอีก 2 ตัวที่เหลือคือข้อใด
1. $(x + 1)(x - 2)$
 2. $(x - 1)(x + 2)$
 3. $(x + 1)(x + 2)$
 4. $(x - 1)(x - 2)$
14. $2x + 5$ เป็นตัวประกอบของพหุนามใด
1. $2x^3 - 3x^2 + 12x - 20$
 2. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$
 3. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$
 4. $2x^3 + 3x^2 - 12x - 20$
15. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $x^2 - 20x + 40$ มีค่าตรงกับข้อใด
1. $(x - 5)(x - 8)$
 2. $(x - 20)(x + 2)$
 3. $(x - 8\sqrt{15})(x - 12\sqrt{15})$
 4. $(x - 10 + 2\sqrt{15})(x - 10 - 2\sqrt{15})$
16. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบ $x^7 - 81x^3$
1. $x^3(x^2 + 9)(x^2 - 9)$
 2. $x^3(x^2 + 27)(x^2 - 3)$
 3. $x^3(x^2 + 3)(x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2})$
 4. $x^3(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$
17. ถ้า $(x + 1)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $x^3 + 2x^2 - x - 2$ แล้ว ตัวประกอบอีก 2 ตัวที่เหลือคือข้อใด
1. $(x + 1)(x - 2)$
 2. $(x - 1)(x + 2)$
 3. $(x + 1)(x + 2)$
 4. $(x - 1)(x - 2)$

18. $2x + 5$ เป็นตัวประกอบของพหุนามใด

1. $2x^3 - 3x^2 + 12x - 20$

2. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$

3. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$

4. $2x^3 + 3x^2 - 12x - 20$

19. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $x^2 - 20x + 40$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. $(x - 5)(x - 8)$

2. $(x - 20)(x + 2)$

3. $(x - 8\sqrt{15})(x - 12\sqrt{15})$

4. $(x - 10 + 2\sqrt{15})(x - 10 - 2\sqrt{15})$

20. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบ $x^7 - 81x^3$

1. $x^3(x^2 + 9)(x^2 - 9)$

2. $x^3(x^2 + 27)(x^2 - 3)$

3. $x^3(x^2 + 3)(x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2})$

4. $x^3(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

ตัวอย่างที่2 จงแยกตัวประกอบของ $(x - 1)^2 - 6$

$$\begin{aligned}
 (x - 1)^2 - 6 &= (x - 1)^2 - (\sqrt{6})^2 \\
 &= [(x - 1) + \sqrt{6}][(x - 1) - \sqrt{6}] \\
 &= (x - 1 + \sqrt{6})(x - 1 - \sqrt{6}) \\
 \text{ดังนั้น } (x - 1)^2 - 6 &= (x - 1 + \sqrt{6})(x - 1 - \sqrt{6})
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่3 จงแยกตัวประกอบของ $32 - (x - 5)^2$

$$\begin{aligned}
 32 - (x - 5)^2 &= (\sqrt{32})^2 - (x - 5)^2 \\
 &= (4\sqrt{2})^2 - (x - 5)^2 \\
 &= [4\sqrt{2} + (x - 5)][4\sqrt{2} - (x - 5)] \\
 &= (4\sqrt{2} + x - 5)(4\sqrt{2} - x + 5) \\
 \text{ดังนั้น } 32 - (x - 5)^2 &= (4\sqrt{2} + x - 5)(4\sqrt{2} - x + 5)
 \end{aligned}$$

ลองทำดู

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

$$1. 9x^2 - 16 = \dots (3x)^2 - 4^2 \dots$$

$$= \dots (3x+4)(3x-4) \dots$$

$$3. x^2 - 9 = \dots x^2 - 3^2 \dots$$

$$= \dots (x+3)(x-3) \dots$$

$$5. 36 - 3x^2 = \dots 6^2 - (\sqrt{3}x)^2 \dots$$

$$= \dots (6+\sqrt{3}x)(6-\sqrt{3}x) \dots$$

$$7. 8x^2 - 121 = \dots (\sqrt{8}x)^2 - 11^2 \dots$$

$$= \dots (2\sqrt{2}x)^2 - 11^2 \dots$$

$$= (2\sqrt{2}x+11)(2\sqrt{2}x-11)$$

$$2. 1 - 81x^2 = \dots 1^2 - (9x)^2 \dots$$

$$= \dots (1+9x)(1-9x) \dots$$

$$4. 50 - 4x^2 = \dots (\sqrt{50})^2 - (2x)^2 \dots$$

$$= \dots (5\sqrt{2})^2 - (2x)^2 = (5\sqrt{2}+2x)(5\sqrt{2}-2x) \dots$$

$$6. 18x^2 - 27 = \dots (\sqrt{18}x)^2 - (\sqrt{27})^2 \dots$$

$$= \dots (3\sqrt{2}x)^2 - (3\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2}x+3\sqrt{3})(3\sqrt{2}x-3\sqrt{3}) \dots$$

$$8. 1 - 16x^2 = \dots 1^2 - (4x)^2 \dots$$

$$= \dots (1+4x)(1-4x) \dots$$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1) \quad x^2 - 7 &= x^2 - (\sqrt{7})^2 \\
 &= (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) \\
 2) \quad 14 - x^2 &= (\sqrt{14})^2 - x^2 \\
 &= (\sqrt{14} + x)(\sqrt{14} - x) \\
 3) \quad 50 - a^2 &= (\sqrt{50})^2 - a^2 \\
 &= (5\sqrt{2})^2 - a^2 = (5\sqrt{2} + a)(5\sqrt{2} - a) \\
 4) \quad x^2 - \frac{14}{25} &= x^2 - (\sqrt{14/5})^2 \\
 &= (x + \sqrt{14/5})(x - \sqrt{14/5}) \\
 5) \quad \frac{16}{49}a^2 - 15 &= (\frac{4}{7}a)^2 - (\sqrt{15})^2 \\
 &= (\frac{4}{7}a + \sqrt{15})(\frac{4}{7}a - \sqrt{15}) \\
 6) \quad 7x^2 - 21 &= (\sqrt{7}x)^2 - (\sqrt{21})^2 \\
 &= (\sqrt{7}x + \sqrt{21})(\sqrt{7}x - \sqrt{21}) \\
 7) \quad (a - 3)^2 - 10 &= (a - 3)^2 - (\sqrt{10})^2 \\
 &= (a - 3 + \sqrt{10})(a - 3 - \sqrt{10}) \\
 8) \quad (3x - 2)^2 - 5 &= (3x - 2)^2 - (\sqrt{5})^2 \\
 &= (3x - 2 + \sqrt{5})(3x - 2 - \sqrt{5}) \\
 9) \quad 18 - (x - 1)^2 &= (3\sqrt{2})^2 - (x - 1)^2 \\
 &= (3\sqrt{2} + x - 1)(3\sqrt{2} - x + 1) \\
 10) \quad 50 - (x + 4)^2 &= (5\sqrt{2})^2 - (x + 4)^2 \\
 &= (5\sqrt{2} + x + 4)(5\sqrt{2} - x - 4)
 \end{aligned}$$

ลองทำดู

1. ให้น้องๆ จัดพหุนามต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$\begin{aligned}
 1) \quad x^2 + 6x + 9 &= \frac{x^2 + 2(x)(3) + 3^2}{(x+3)^2} \\
 2) \quad y^2 - 14y + 49 &= \frac{y^2 - 2(y)(7) + 7^2}{(y-7)^2} \\
 3) \quad a^2 - 4ab + 4b^2 &= \frac{a^2 - 2(a)(2b) + (2b)^2}{(a-2b)^2} \\
 4) \quad 4m^2 - 4m + 1 &= \frac{(2m)^2 - 2(2m)(1) + 1^2}{(2m-1)^2} \\
 5) \quad 100x^2 + 20x + 1 &= \frac{(10x)^2 + 2(10x)(1) + 1^2}{(10x+1)^2} \\
 6) \quad x^2 - 3x + \frac{9}{4} &= \frac{x^2 - 2(x)(\frac{3}{2}) + (\frac{3}{2})^2}{(x-\frac{3}{2})^2}
 \end{aligned}$$

2. ให้น้องๆ เติมพจน์ที่หายไปลงในช่องว่างเพื่อทำให้พหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ แล้วแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned}
 1) \quad x^2 + \frac{2(x)(4)}{+16} &= \frac{x^2}{(x+4)^2} \\
 2) \quad 9x^2 + \frac{2(3x)(2)}{+4} &= \frac{(3x+2)^2}{(3x+2)^2} \\
 3) \quad \frac{4}{9}x^2 + \frac{2(\frac{2x}{3})(\frac{1}{2})}{+ \frac{1}{4}} &= \frac{(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2})^2}{(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2})^2} \\
 4) \quad 4x^2 + \frac{2(2x)(5)}{+25} &= \frac{(2x+5)^2}{(2x+5)^2} \\
 5) \quad m^2 + 6m + \frac{2(m)(3)}{3^2} &= \frac{(m+3)^2}{(m+3)^2} \\
 6) \quad m^2 - 9m + \frac{2(m)(\frac{9}{2})}{(\frac{9}{2})^2} &= \frac{(m-\frac{9}{2})^2}{(m-\frac{9}{2})^2} \\
 7) \quad 4m^2 + 13m + \frac{2(2m)(\frac{13}{4})}{(\frac{13}{4})^2} &= \frac{(2m+\frac{13}{4})^2}{(2m+\frac{13}{4})^2} \\
 8) \quad 25m^2 + \frac{2(5m)(\frac{1}{4})}{(\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{16} &= \frac{(5m+\frac{1}{4})^2}{(5m+\frac{1}{4})^2} \\
 9) \quad (5x)^2 + 15x + \frac{2(5x)(\frac{3}{2})}{(\frac{3}{2})^2} &= \frac{(5x+\frac{3}{2})^2}{(5x+\frac{3}{2})^2} \\
 10) \quad x^2 - x + \frac{1}{4} &= \frac{x^2 - 2(x)(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^2}
 \end{aligned}$$

3. ให้น้องๆ แยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$\begin{aligned}
 1. \quad x^2 + 6x + 5 &= x^2 + 2(x)(3) + 3^2 - 3^2 + 5 \\
 &= (x+3)^2 - 4 \\
 &= (x+3)^2 - 2^2 \\
 &= (x+3+2)(x+3-2) \\
 &= (x+5)(x+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad x^2 - 4x - 12 &= x^2 - 2(x)(2) + 2^2 - 2^2 - 12 \\
 &= (x-2)^2 - 16 \\
 &= (x-2)^2 - 4^2 \\
 &= (x-2+4)(x-2-4) \\
 &= (x+2)(x-6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad x^2 + 4x + 1 &= x^2 + 2(x)(2) + 2^2 - 2^2 + 1 \\
 &= (x+2)^2 - 3 \\
 &= (x+2)^2 - (\sqrt{3})^2 \\
 &= (x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad 3x^2 + 13x - 30 &= 3\left(x^2 + \frac{13}{3}x - 10\right) \\
 &= 3\left(x^2 + 2(x)\left(\frac{13}{6}\right) + \left(\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 - 10\right) \\
 &= 3\left[\left(x + \frac{13}{6}\right)^2 - \frac{529}{36}\right] - \left(\frac{13}{6}\right)^2 - 10 \\
 &= 3\left[\left(x + \frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{23}{3}\right)^2\right] \\
 &= 3\left[\left(x + \frac{13}{6} + \frac{23}{3}\right)\left(x + \frac{13}{6} - \frac{23}{3}\right)\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad x^2 - 3x - 5 &= x^2 - 2(x)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5 \\
 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 5 \\
 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} \\
 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 \\
 &= \left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad x^2 - 7x + 4 &= 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}\right) \\
 &= x^2 - 2(x)\left(\frac{7}{2}\right) + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 4 \\
 &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{33}{4} \\
 &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2 \\
 &= \left(x - \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$7. 6x^2 - 18x + 3$$

$$6x^2 - 18x + 3 = 6(x^2 - 3x + \frac{1}{2})$$

$$= 6 \left[x^2 - 2(x)(\frac{3}{2}) + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2} \right]$$

$$= 6 \left[(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{4} \right]$$

$$= 6 \left[(x - \frac{3}{2})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{2})^2 \right]$$

$$= 6(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2})(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2})$$

$$8. -x^2 + 9x + 12$$

$$-x^2 + 9x + 12 = -(x^2 - 9x - 12)$$

$$= - \left[x^2 - 2(x)(\frac{9}{2}) + (\frac{9}{2})^2 - (\frac{9}{2})^2 - 12 \right]$$

$$= - \left[(x - \frac{9}{2})^2 - \frac{129}{4} \right]$$

$$= - \left[(x - \frac{9}{2})^2 - (\frac{\sqrt{129}}{2})^2 \right]$$

$$= - \left(x - \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{129}}{2} \right)$$

$$\left(x - \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{129}}{2} \right)$$

$$9. -x^2 - 6x + 4$$

$$-x^2 - 6x + 4 = -(x^2 + 6x - 4)$$

$$= - \left[x^2 + 2(x)(3) + 3^2 - 3^2 - 4 \right]$$

$$= - \left[(x + 3)^2 - 13 \right]$$

$$= - \left[(x + 3)^2 - (\sqrt{13})^2 \right]$$

$$= - (x + 3 + \sqrt{13})(x + 3 - \sqrt{13})$$

$$10. x^2 - 6x - 4$$

$$x^2 - 6x - 4 = x^2 - 2(x)(3) + 3^2 - 3^2 - 4$$

$$= (x - 3)^2 - 13$$

$$= (x - 3)^2 - (\sqrt{13})^2$$

$$= (x - 3 + \sqrt{13})(x - 3 - \sqrt{13})$$

$$11. x^2 - 12x + 12$$

$$x^2 - 12x + 12 = x^2 - 2(x)(6) + 6^2 - 6^2 + 12$$

$$= (x - 6)^2 - 24$$

$$= (x - 6)^2 - (2\sqrt{6})^2$$

$$= (x - 6 + 2\sqrt{6})(x - 6 - 2\sqrt{6})$$

$$12. 4x^2 - 8x - 4$$

$$= 4(x^2 - 2x - 1)$$

$$= 4 \left[x^2 - 2(x)(1) + 1^2 - 1^2 - 1 \right]$$

$$= 4 \left[(x - 1)^2 - 2 \right]$$

$$= 4 \left[(x - 1)^2 - (\sqrt{2})^2 \right]$$

$$= 4(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลบวกกำลังสาม

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

ทดสอบความเข้าใจ

$$\begin{aligned}(x+2)(x^2-2x+4) &= \overset{3}{x} - \overset{2}{2x} + \overset{4x}{4x} - \overset{2}{4x} + \overset{2}{8} \\ &= \overset{3}{x} + \overset{3}{8} = \overset{3}{x} + \overset{3}{2^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+4)(x^2-4x+16) &= \overset{3}{x} - \overset{2}{4x} + \overset{2}{16x} + \overset{2}{4x} - \overset{2}{16x} + \overset{2}{64} \\ &= \overset{3}{x} + \overset{3}{64} = \overset{3}{x} + \overset{3}{4^3}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $y^3 + 64$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad y^3 + 64 &= y^3 + 4^3 \\ &= (y + 4)(y^2 - (4)(y) + 4^2) \\ &= (y + 4)(y^2 - 4y + 16) \\ \text{ดังนั้น} \quad y^3 + 64 &= (y + 4)(y^2 - 4y + 16) \quad \times\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $64a^3 + 125$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad 64a^3 + 125 &= (4a)^3 + 5^3 \\ &= (4a + 5)[(4a)^2 - (4a)(5) + 5^2] \\ &= (4a + 5)(16a^2 - 20a + 25) \\ \text{ดังนั้น} \quad 64a^3 + 125 &= (4a + 5)(16a^2 - 20a + 25) \quad \times\end{aligned}$$

ลองทำดู

$$= (4x+1)(4x^2+2x+1)$$

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

$$1) a^3 + 8b^3 = a^3 + (2b)^3 = (a+2b)(a^2 - (a)(2b) + (2b)^2)$$

$$= (a+2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$$

$$2) x^3 + 216 = x^3 + 6^3 = (x+6)(x^2 - (x)(6) + 6^2)$$

$$= (x+6)(x^2 - 6x + 36)$$

$$3) m^3 + (n+1)^3 = (m+n+1)(m^2 - m(n+1) + (n+1)^2)$$

$$= (m+n+1)(m^2 - mn - m + n^2 + 2n + 1)$$

$$4) 8x^3 + (2x+1)^3 = (2x)^3 + (2x+1)^3 = (2x+2x+1)((2x)^2 - (2x)(2x+1) + (2x+1)^2)$$

$$= (4x+1)(4x^2 - 4x^2 - 2x + 4x^2 + 4x + 1)$$

$$5) 729 + (x-4)^3 = 9^3 + (x-4)^3 = (9+x-4)(9^2 - (9)(x-4) + (x-4)^2)$$

$$= (x+5)(81 - 9x + 36 + x^2 - 8x + 16)$$

$$6) (3x+1)^3 + 125 = (x+5)(x^2 - 17x + 133)$$

$$7) (m+n)^3 + 1,000 =$$

$$8) (x+y)^3 + (x-y)^3 =$$

$$9) (2x+3)^3 + (3x-1)^3 =$$

$$10) (3x-1)^3 + (x-4)^3 =$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad (3x+1)^3 + 125 &= (3x+1)^3 + 5^3 \\
 &= (3x+1+5) \left((3x+1)^2 - (3x+1)(5) + 5^2 \right) \\
 &= (3x+6) [9x^2 + 6x + 1 - 15x - 5 + 25] \\
 &= (3x+6) (9x^2 - 9x + 21) \quad \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{7} \quad (m+n)^3 + 1000 &= (m+n)^3 + 10^3 \\
 &= (m+n+10) \left((m+n)^2 - (m+n)(10) + 10^2 \right) \\
 &= (m+n+10) [m^2 + 2mn + n^2 - 10m - 10n + 100] \quad \times \\
 &= (m+n+10) \quad \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{8} \quad (x+y)^3 + (x-y)^3 &= (x+y+x-y) \left[(x+y)^2 - (x+y)(x-y) + (x-y)^2 \right] \\
 &= (2x) [x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + y^2 + x^2 - 2xy + y^2] \\
 &= (2x) (x^2 + 3y^2) \quad \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{9} \quad (2x+3)^3 (3x-1)^3 &= (2x+3+3x-1) \left[(2x+3)^2 - (2x+3)(3x-1) + (3x-1)^2 \right] \\
 &= (5x+2) [4x^2 + 12x + 9 - (6x^2 + 7x - 3) + 9x^2 - 6x + 1] \\
 &= (5x+2) [7x^2 - x + 13] \quad \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{10} \quad (3x-1)^3 + (x-4)^3 &= (3x-1+x-4) \left[(3x-1)^2 - (3x-1)(x-4) + (x-4)^2 \right] \\
 &= (4x-5) [9x^2 - 6x + 1 - (3x^2 - 13x + 4) + x^2 - 8x + 16] \\
 &= (4x-5) (7x^2 - x + 13) \quad \times
 \end{aligned}$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูปผลต่างกำลังสาม

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

ทดสอบความเข้าใจ

$$\begin{aligned}(x-2)(x^2+2x+4) &= \frac{x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8}{\dots\dots\dots} \\ &= \frac{x^3 - 8}{\dots\dots\dots} = \frac{x^3 - 2^3}{\dots\dots\dots}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-4)(x^2+4x+16) &= \frac{x^3 + 4x^2 + 16x - 4x^2 - 16x - 64}{\dots\dots\dots} \\ &= \frac{x^3 - 64}{\dots\dots\dots} = \frac{x^3 - 4^3}{\dots\dots\dots}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $y^3 - 1$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad y^3 - 1 &= y^3 - 1^3 \\ &= (y - 1)(y^2 + (y)(1) + 1^2) \\ &= (y - 1)(y^2 + y + 1) \\ \text{ดังนั้น} \quad y^3 - 1 &= (y - 1)(y^2 + y + 1)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $27 - b^3$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad 27 - b^3 &= 3^3 - b^3 \\ &= (3 - b)(3^2 + (3)(b) + b^2) \\ &= (3 - b)(9 + 3b + b^2) \\ \text{ดังนั้น} \quad 27 - b^3 &= (3 - b)(9 + 3b + b^2)\end{aligned}$$

ลองทำดู

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

$$1) 216 - a^3b^3 = (6-ab)(36+6ab+a^2b^2)$$

$$2) 64x^3 - 125y^3 = (4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$$

$$3) 1,331^3 - x^3y^3z^3 = (1331-xyz)(1771561+1331xyz+x^2y^2z^2)$$

$$4) x^3y^3 - 512z^3 = (xy-8z)(x^2y^2+8xyz+64z^2)$$

$$5) 1 - (a+b)^3 = (1-a-b)(1+a+b+a^2+2ab+b^2)$$

$$6) x^3y^3z^3 - 1 = (xyz-1)(x^2y^2z^2+xyz+1)$$

$$7) 8x^3 - (2x+y)^3 = -y(12x+6xy+y^2)$$

$$8) (3x-1)^3 - 8 = (3x-3)(9x^2+3)$$

$$9) (2x+5)^3 - (2x-1)^3 = 6(12x^2+24x+21)$$

$$10) (7x-2)^3 - (2x+3)^3 = (5x-3)(67x^2+x+19)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 216 - a^3b^3 &= 6^3 - (ab)^3 \\ &= (6 - ab) [6^2 + (6)(ab) + (ab)^2] \\ &= (6 - ab) (36 + 6ab + a^2b^2) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad 64x^3 - 125y^3 &= (4x)^3 - (5y)^3 \\ &= (4x - 5y) [(4x)^2 + (4x)(5y) + (5y)^2] \\ &= (4x - 5y) (16x^2 + 20xy + 25y^2) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad 1331^3 - x^3y^3z^3 &= 1331^3 - (xyz)^3 \\ &= (1331 - xyz) [1331^2 + (1331)(xyz) + (xyz)^2] \\ &= (1331 - xyz) (1,771,561 + 1331xyz + x^2y^2z^2) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad x^3y^3 - 512z^3 &= (xy)^3 - (8z)^3 \\ &= (xy - 8z) [(xy)^2 + (xy)(8z) + (8z)^2] \\ &= (xy - 8z) (x^2y^2 + 8xyz + 64z^2) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad 1 - (a+b)^3 &= 1^3 - (a+b)^3 \\ &= [1 - (a+b)] [1^2 + (1)(a+b) + (a+b)^2] \\ &= (1 - a - b) (1 + a + b + a^2 + 2ab + b^2) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad x^3y^3z^3 - 1 &= (xyz)^3 - 1^3 \\ &= (xyz - 1) [(xyz)^2 + (xyz)(1) + 1^2] \\ &= (xyz - 1) (x^2y^2z^2 + xyz + 1) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad 8x^3 - (2x+y)^3 &= (2x)^3 - (2x+y)^3 \\ &= [2x - (2x+y)] [(2x)^2 + (2x)(2x+y) + (2x+y)^2] \\ &= (2x - 2x - y) (4x^2 + 4x^2 + 2xy + 4x^2 + 4xy + y^2) \\ &= (-y) (12x^2 + 6xy + y^2) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{8} \quad (3x-1)^3 - 8 &= (3x-1)^3 - 2^3 \\
 &= (3x-1-2) \left[(3x-1)^2 + (3x-1)(2) + 2^2 \right] \\
 &= (3x-3) (9x^2 - 6x + 1 + 6x - 2 + 4) \\
 &= (3x-3) (9x^2 + 3) *
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{9} \quad (2x+5)^3 - (2x-1)^3 &= [(2x+5) - (2x-1)] \left[(2x+5)^2 + (2x+5)(2x-1) + (2x-1)^2 \right] \\
 &= (2x+5-2x+1) (4x^2 + 20x + 25 + 4x^2 - 2x + 10x - 5 + 4x^2 - 4x + 1) \\
 &= 6 (12x^2 + 24x + 21) *
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{10} \quad (7x-2)^3 - (2x+3)^3 &= [(7x-2) - (2x+3)] \left[(7x-2)^2 + (7x-2)(2x+3) + (2x+3)^2 \right] \\
 &= (7x-2-2x-3) (49x^2 - 28x + 4 + 14x^2 + 21x - 4x + 6 + 4x^2 + 12x + 9) \\
 &= (5x-5) (67x^2 + x + 19) *
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy - 96$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy - 96 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (4x + 4y) - 96 \\ &= (x + y)^2 - 4(x + y) - 96 \\ &= [(x + y) - 12][(x + y) + 8] \\ &= (x + y - 12)(x + y + 8) \end{aligned}$$

ลองทำดู

จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

$$1) \ n^4 - 13n^2 + 36 = (n-3)(n+3)(n-2)(n+2)$$

$$2) \ m^2 - 2mn + n^2 - 9 = (m-n-3)(m-n+3)$$

$$3) \ x^3y^6z^9 + 1 = (xy^2z^3+1)(x^2y^4z^6-xy^2z^3+1)$$

$$4) \ x^8 - 16 = (x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$$

$$5) \ 2 - 50m^2n^2 = 2(1-5mn)(1+5mn)$$

$$6) \ a^2 + 4b^2 - 16c^2 - 4ab = (a-2b-4c)(a-2b+4c)$$

$$7) x^4 + 4 = \frac{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)}{}$$

$$8) x^3 - 39x + 70 = \frac{(x-2)(x+7)(x-5)}{}$$

$$9) x^3 + x^2 - 10x + 8 = \frac{(x-1)(x+4)(x-2)}{}$$

$$10) 2x^3 - 5x^2 - x + 6 = \frac{(x-2)(2x-3)(x+1)}{}$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

ทฤษฎีเศษเหลือ

ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $\boxed{x-a}$ โดยที่ a เป็นค่าคงตัว จะได้เศษเหลือเป็น $P(a)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเศษจากการหาร $x^3 - 4x^2 - x - 3$ ด้วย $x - 4$

วิธีทำ จากทฤษฎีเศษเหลือ ถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $x - a$ เศษจะเท่ากับ $P(a)$

ดังนั้น ถ้าหาร $x^3 - 4x^2 - x - 3$ ด้วย $x - 4$ เศษจะเท่ากับ $P(4)$

$$\text{จาก } P(x) = x^3 - 4x^2 - x - 3$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(4) &= 4^3 - 4(4)^2 - 4 - 3 \\ &= 64 - 64 - 4 - 3 \\ &= -7 \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าหาร $x^3 - 4x^2 - x - 3$ ด้วย $x - 4$ จะเหลือเศษ $= -7$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad n^4 - 13n^2 + 36 &= (n^2 - 9)(n^2 - 4) \\ &= (n-3)(n+3)(n-2)(n+2) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad m^2 - 2mn + n^2 - 9 &= (m^2 - 2mn + n^2) - 9 \\ &= (m-n)^2 - 3^2 \\ &= (m-n-3)(m-n+3) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad x^3 y^6 z^9 + 1 &= (x^2 y^2 z^3)^3 + 1^3 \\ &= (x^2 y^2 z^3 + 1) [(x^2 y^2 z^3)^2 - (x^2 y^2 z^3)(1) + 1^2] \\ &= (x^2 y^2 z^3 + 1) (x^4 y^4 z^6 - x^2 y^2 z^3 + 1) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad x^8 - 16 &= (x^4)^2 - 4^2 \\ &= (x^4 - 4)(x^4 + 4) \\ &= [(x^2)^2 - 2^2] [(x^2)^2 + 2(x^2)(2) + 2^2 - 4x^2] \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 2) [(x^2 + 2)^2 - (2x)^2] \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad 2 - 50m^2 n^2 &= 2(1 - 25m^2 n^2) \\ &= 2[1^2 - (5mn)^2] \\ &= 2(1 - 5mn)(1 + 5mn) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad a^2 + 4b^2 - 16c^2 - 4ab &= (a^2 - 4ab + 4b^2) - 16c^2 \\ &= (a-2b)^2 - (4c)^2 \\ &= (a-2b-4c)(a-2b+4c) \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{7.} \quad x^4 + 4 &= (x^2)^2 + 2(x^2)(2) + 2^2 - 4x^2 \\
 &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
 &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \quad *
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{8.} \quad x^3 - 39x + 70 =$$

1. $x=2$ 2. $x=5$ 3. $x=7$

$$2^3 - 39(2) + 70 = 8 - 78 + 70 = 0$$

1. $x=2$ 2. $x=5$ 3. $x=7$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x - 35 \\
 x-2 \overline{) x^3 + 0x^2 - 39x + 70} \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 2x^2 - 39x \\
 \underline{2x^2 - 4x} \\
 -35x + 70 \\
 \underline{-35x + 70} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^3 - 39x + 70 &= (x-2)(x^2 + 2x - 35) \\
 &= (x-2)(x+7)(x-5) \quad *
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{9.} \quad x^3 + x^2 - 10x + 8 =$$

1. $x=1$ 2. $x=2$ 3. $x=4$

$$1^3 + 1^2 - 10(1) + 8 = 0$$

1. $x=1$ 2. $x=2$ 3. $x=4$

ข้อ 9

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x - 8 \\
 \hline
 x-1 \overline{) \begin{array}{r} x^3 + x^2 - 10x + 8 \\ x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 - 10x \\ 2x^2 - 2x \\ \hline -8x + 8 \\ -8x + 8 \\ \hline 0 \end{array}}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^3 + x^2 - 10x + 8 &= (x-1)(x^2 + 2x - 8) \\
 &= (x-1)(x+4)(x-2) \quad *
 \end{aligned}$$

(10)

$$2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

$$\begin{aligned}
 \text{ให้ } x=2 \text{ จะได้ } 2(2)^3 - 5(2)^2 - 2 + 6 &= 16 - 20 - 2 + 6 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ให้ $x=2$ เป็นค่าของ x ที่ทำให้พหุนามเป็น 0

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - x - 3 \\
 \hline
 x-2 \overline{) \begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 - x + 6 \\ 2x^3 - 4x^2 \\ \hline -x^2 - x \\ -x^2 + 2x \\ \hline -3x + 6 \\ -3x + 6 \\ \hline 0 \end{array}}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 2x^3 - 5x^2 - 10x + 6 &= (x-2)(2x^2 - x - 3) \\
 &= (x-2)(2x-3)(x+1) \quad *
 \end{aligned}$$

พิจูจน์

$$\begin{array}{r} x^2 - 1 \\ x - 4 \overline{) x^3 - 4x^2 - x - 3} \\ \underline{x^3 - 4x^2} \\ -x - 3 \\ -x + 4 \\ \hline -7 \\ = \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเศษจากการหาร $-2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + \boxed{7}$ ด้วย $x + 1$

วิธีทำ ให้ $P(x) = -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + 7$

$$x - a = x + 1 = x - (-1)$$

ดังนั้น $a = -1$

เศษจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x + 1$ คือ $P(-1)$

$$\begin{aligned}\therefore P(-1) &= -2(-1)^5 + 4(-1)^4 - 3(-1)^3 + 8(-1) + 7 \\ &= 2 + 4 + 3 - 8 + 7 \\ &= 8\end{aligned}$$

ดังนั้น เศษจากการหาร $-2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 8x + 7$ ด้วย $x + 1$ คือ 8

พิสูจน์

$$\begin{array}{r}
 \overset{4}{-2}x^5 + \overset{3}{4}x^4 - \overset{2}{-3}x^3 + 8x + 7 \\
 \underline{x+1} \\
 \overset{5}{-2}x^5 + \overset{4}{4}x^4 - \\
 \underline{ } \\
 \overset{4}{6}x^4 - \overset{3}{3}x^3 \\
 \underline{ } \\
 \overset{4}{6}x^4 + \overset{3}{6}x^3 \\
 \underline{ } \\
 \overset{3}{-9}x^3 \\
 \overset{3}{-9}x^3 - \overset{2}{9}x^2 \\
 \underline{ } \\
 \overset{2}{9}x^2 + 8x \\
 \overset{2}{9}x^2 + 9x \\
 \underline{ } \\
 -x + 7 \\
 -x - 1
 \end{array}$$

ในการแยกตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ เราจะต้องหาจำนวน a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ ก่อน

ในกรณีทั่วไป เมื่อ $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดเป็น 1 และ a เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $P(a) = 0$ จะได้ว่า a หารพจน์ที่เป็นค่าคงที่ของพหุนาม $P(x)$ ได้ลงตัว ดังนั้นการหาจำนวนเต็ม a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ เราจะพิจารณาจากจำนวนเต็มที่หารพจน์ที่เป็นค่าคงตัวของพหุนาม $P(x)$ ได้ลงตัว

ดังนั้นการแยกตัวประกอบของ $P(x)$ ซึ่งเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดเป็น 1 ได้โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ ซึ่งสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. หาจำนวนเต็ม a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ จะได้ว่า $x - a$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$
2. นำ $(x - a)$ ที่ได้จากข้อ 1 ไปหารพหุนาม $P(x)$ ได้ผลหารเป็นพหุนามใหม่ ($Q(x)$) ที่ไม่ซ้ำกับพหุนาม $P(x)$ และมีดีกรีน้อยกว่า $P(x)$ อยู่ 1 และได้ว่า $P(x) = (x - a)Q(x)$
3. ถ้า $Q(x)$ ที่ได้ในข้อ 2 เป็นพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่า 2 และสามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้ ก็แยกตัวประกอบของ $Q(x)$ โดยใช้วิธีตามข้อ 1 และข้อ 2 แต่ถ้า $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรีสองและสามารถแยกตัวประกอบได้ตามวิธีการที่เรียนมาแล้วก็ให้แยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 2x^2 - 2x + 12$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

วิธีทำ จากโจทย์ $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 12$

พจน์ที่เป็นค่าคงตัวคือ 12

จำนวนที่หาร 12 ได้ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$

พิจารณา $P(1), P(-1)$ จะได้ $P(1) \neq 0, P(-1) \neq 0$

พิจารณา $P(2) \neq 0$

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 2(-2) + 12$$

$$= (-8) - 8 + 4 + 12 = 0$$

ดังนั้น $x - (-2)$ หรือ $x + 2$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

นำ $x + 2$ ไปหาร $P(x)$ จะได้ผลหารคือ $x^2 - 4x + 6$

$$\text{จะได้ } P(x) = (x + 2)(x^2 - 4x + 6)$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 6 \\ x+2 \overline{) x^3 - 2x^2 - 2x + 12} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -4x^2 - 2x \\ \underline{-4x^2 - 8x} \\ 6x + 12 \\ \underline{6x + 12} \\ 0 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า k ที่ทำให้ $x - 5$ หาร $x^3 - 3x^2 + kx - 20$ ลงตัว

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 - 3x^2 + kx - 20$

ถ้า $x - 5$ หาร $P(x)$ ลงตัว แสดงว่า $P(5) = 0$

$$\text{หา } P(5) = 5^3 - 3(5)^2 + k(5) - 20$$

$$= 125 - 75 + 5k - 20$$

$$= 30 + 5k$$

$$\text{ดังนั้น } 30 + 5k = 0$$

$$5k = -30$$

$$\boxed{k = -6}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า k ที่ทำให้ $x - 6$ หาร $x^3 - 8x^2 + 19x + k$ แล้วเหลือเศษ 15

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 - 8x^2 + 19x + k$

ถ้า $x - 6$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 15

$$\text{แสดงว่า } P(6) = 15$$

$$\text{หา } P(6) = 6^3 - 8(6)^2 + 19(6) + k$$

$$= 216 - 288 + 114 + k$$

$$= 42 + k$$

$$\text{ดังนั้น } 42 + k = 15$$

$$\boxed{k = 15 - 42 = -27}$$

ลองทำดู

$P(a) \quad P(x)$

1. ให้น้องๆ หาค่า ~~$P(a)$~~ จาก ~~$P(x)$~~ และ a ที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อต่อไปนี่

$$1) P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 5, a = 2$$

$$P(2) = 2^4 - 4(2)^3 + 3(2)^2 - 2(2) + 5 = 16 - 32 + 12 - 4 + 5 = -3$$

$$2) P(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 8, a = -3$$

$$P(-3) = 3(-3)^3 - (-3)^2 - 2(-3) + 8 = -81 - 9 + 6 + 8 = -76$$

$$3) P(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x - 4, a = -1$$

$$P(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2(-1) - 4 = 1 + 3 + 2 - 4 = 2$$

$$4) P(x) = -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 8x + 7, a = 4$$

$$P(4) = -2(4)^5 + 4(4)^4 - 3(4)^3 - 8(4) + 7 = -4^5 - 192 - 32 + 7 = -1241$$

$$5) P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 12, a = -2$$

$$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 2(-2) + 12 = -8 - 8 + 4 + 12 = 0$$

2. จงหาค่า k ที่ทำให้ $x - 2$ หาร $kx^3 - 3x^2 + 4x - 4$ ลงตัว

$$P(-2) = k(-2)^3 - 3(-2)^2 + 4(-2) - 4 \quad | \quad P(-2) = 0$$

$$= -8k - 12 - 8 - 4$$

$$= -8k - 24$$

$$-8k - 24 = 0$$

$$k = \frac{-24}{-8} = -3 \quad \#$$

3. จงหาค่า k ที่ทำให้ $x - 3$ หาร $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - kx + 7$ เหลือเศษ -2

$$P(-3) = (-3)^4 - 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - k(-3) + 7 \quad | \quad P(-3) = -2$$

$$= 81 + 54 + 27 + 3k + 7$$

$$= 169 + 3k$$

$$169 + 3k = -2$$

$$k = \frac{-2 - 169}{3} = -57 \quad \#$$

4. จงหาค่า t ที่ทำให้ $x + t$ หาร $x^2 + 5x - 2$ เหลือเศษ -8

$$P(-t) = (-t)^2 + 5(-t) - 2 = -8 \quad | \quad (t-2)(t-3) = 0$$

$$t^2 - 5t - 2 + 8 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t = 2, 3$$

5. จงหาเศษจากการหารต่อไปนี้

- 1) $x^3 - x^2 + 10x - 8$ หารด้วย $x - 3$

$$P(3) = (3)^3 - (3)^2 + 10(3) - 8 = 27 - 9 + 30 - 8 = 40 \quad \#$$

- 2) $2x^3 - 4x^2 - 7x + 1$ หารด้วย $x - \frac{1}{2}$

$$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 4(\frac{1}{2})^2 - 7(\frac{1}{2}) + 1 = 2 - 4 - 7 + 1 = -8 \quad \#$$

- 3) $-2x^5 + 9x^4 + 19x^3 + 51x^2 - 89x + 30$ หารด้วย $x + 3$

$$P(-3) = -2(-3)^5 + 9(-3)^4 + 19(-3)^3 + 51(-3)^2 - 89(-3) + 30$$

$$= 19(-3)^3 + 51(-3)^2 - 89(-3) + 30$$

- 4) $9x^2 + 4x - 1$ หารด้วย $x - \frac{1}{2}$

$$P(\frac{1}{2}) = 9(\frac{1}{2})^2 + 4(\frac{1}{2}) - 1 = \frac{9}{4} + 2 - 1 = \frac{13}{4} \quad \#$$

- 5) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ หารด้วย $x + 1$

$$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2$$

$$= -1 - 2 + 1 + 2$$

$$= 0 \quad \#$$

6. ให้น้องๆ แยกตัวประกอบของพหุนามในแต่ละข้อโดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ



$$3x^3 + 5x^2 - 3x - 5$$

$$P(1) = 3(1)^3 + 5(1)^2 - 3(1) - 5$$

$$= 3 + 5 - 3 - 5$$

$$= 0$$

ดังนั้น $(x-1)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

$$\therefore 3x^3 + 5x^2 - 3x - 5 = (x-1)(3x^2 + 8x + 5)$$

$$= (x-1)(3x+5)(x+1) \quad \star$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 5x^2 - 3x - 5 \\ x-1 \overline{) 3x^3 + 5x^2 - 3x - 5} \\ \underline{3x^3 - 3x^2} \\ 8x^2 - 3x \\ \underline{8x^2 - 8x} \\ 5x - 5 \\ \underline{5x - 5} \\ 0 \end{array}$$



$$2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$$

$$P(1) = 2(1)^4 + 5(1)^3 - 5(1)^2 - 5(1) + 3$$

$$= 2 + 5 - 5 - 5 + 3$$

$$= 0$$

ดังนั้น $(x-1)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3 \\ x-1 \overline{) 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3} \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \\ 7x^3 - 5x^2 \\ \underline{7x^3 - 7x^2} \\ 2x^2 - 5x \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ -3x + 3 \\ \underline{-3x + 3} \\ 0 \end{array}$$



$$x^3 + 4x^2 - 11x + 6$$

$$P(1) = (1)^3 + 4(1)^2 - 11(1) + 6$$

$$= 1 + 4 - 11 + 6$$

$$= 0$$

ดังนั้น $(x-1)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 11x + 6 \\ x-1 \overline{) x^3 + 4x^2 - 11x + 6} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 5x^2 - 11x \\ \underline{5x^2 - 5x} \\ -6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore x^3 + 4x^2 - 11x + 6 = (x-1)(x^2 + 5x - 6)$$

$$= (x-1)(x+6)(x-1) \quad \star$$

4.)



$$x^3 + 7x^2 - x - 7$$

$$P(1) = (1)^3 + 7(1)^2 - 1 - 7$$

$$= 1 + 7 - 1 - 7$$

$$= 0$$

∴ $(x-1)$ is a factor of $P(x)$

$$\begin{array}{r} x^2 + 8x + 7 \\ x-1 \overline{) x^3 + 7x^2 - x - 7} \\ \underline{x^2 - x} \\ 8x^2 - x - 7 \\ \underline{8x^2 - 8x} \\ 7x - 7 \\ \underline{7x - 7} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore x^3 + 7x^2 - x - 7 = (x-1)(x^2 + 8x + 7)$$

$$= (x-1)(x+7)(x+1) \quad \#$$

5.)



$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$$

$$= (x+3)(x-2)(x+3)(x-2) \quad \#$$

6.)



$$2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$$

$$(x-1)(x+1)(2x-1)(x+3) \quad \#$$

202 me

$$Q(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$$

$$Q(-1) = 2(-1)^3 + 7(-1)^2 + 2(-1) - 3$$

$$= -2 + 7 - 2 - 3$$

40

ចំណុច $(x+1)$ ត្រូវបានបញ្ចូលទៅក្នុង $Q(x)$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x - 3 \\ x+1 \overline{) 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3} \\ \underline{2x^3 + 2x^2} \\ 5x^2 + 2x - 3 \end{array}$$

$$\overline{5x^2 + 2x}$$

$$5x^2 + 5x$$

$$-3x-3$$

$$-3x-3$$

⑤

$$\therefore 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3 = (x-1)(x+1)(2x^2 + 5x - 3)$$

$$= (x-1)(x+1)(2x-1)(x+3)$$

$$\textcircled{5} \quad x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$$

$$\begin{aligned} P(-3) &= (-3)^4 + 2(-3)^3 - 11(-3)^2 - 12(-3) + 36 \\ &= 81 - 54 - 99 + 36 + 36 \\ &= 0 \end{aligned}$$

តើ $(x+3)$ ជាកត្តាដេកាណាស់នៃ $P(x)$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ x+3 \overline{) x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36} \\ \underline{x^4 + 3x^3} \\ -x^3 - 11x^2 \\ \underline{-x^3 - 3x^2} \\ -8x^2 - 12x \\ \underline{-8x^2 - 24x} \\ 12x + 36 \\ \underline{12x + 36} \\ 0 \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

$$\begin{aligned} Q(2) &= (2)^3 - (2)^2 - 8(2) + 12 \\ &= 8 - 4 - 16 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

តើ $(x-2)$ ជាកត្តាដេកាណាស់នៃ $Q(x)$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 6 \\ x-2 \overline{) x^3 - x^2 - 8x + 12} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 8x \\ \underline{x^2 - 2x} \\ -6x + 12 \\ \underline{-6x + 12} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = (x+3)(x-2)(x^2 + x - 6)$$

$$(6) \quad 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$$

$$P(1) = 2(1)^4 + 5(1)^3 - 5(1)^2 - 5(1) + 3$$

$$= 2 + 5 - 5 - 5 + 3$$

$$= 0$$

၁၁-အိုက် (x-1) ကို ပိုင်းစုကြည့်ရအောင် P(x)

$$x-1 \overline{) 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3}$$

$$2x^4 - 2x^3$$

$$7x^3 - 5x^2$$

$$7x^3 - 7x^2$$

$$2x^2 - 5x$$

$$2x^2 - 2x$$

$$-3x + 3$$

$$-3x + 3$$

$$0$$

$$Q(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$$

$$Q(-1) = 2(-1)^3 + 7(-1)^2 + 2(-1) - 3$$

$$= -2 + 7 - 2 - 3$$

$$= 0$$

၁၁-အိုက် (x+1) ကို ပိုင်းစုကြည့်ရအောင် Q(x)

$$x+1 \overline{) 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3}$$

$$2x^3 + 2x^2$$

$$5x^2 + 2x$$

$$5x^2 + 5x$$

$$-3x - 3$$

$$-3x - 3$$

$$0$$

$$4 \quad 3 \quad 2$$

$$2$$

$$(x-1)(x+1)(2x^2+5x-3)$$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบ

~~$x(x - 1)$~~

$3. (x - 5)(x + 2) - x$

$2. x + (x - 1)$

$4. x^3 - x^2 - 2x + 1$

2. ข้อใดเป็นจริง

$1. 4x(y - 1) = 4x^2y - 4x$

$3. -3(2x - 3y) = 6y + 9x$

~~$3x^2(y - 3) = 3x^2y - 9x^2$~~

$4. -4x(x + 2) = -4x^2 + 8x$

3. ข้อใดต่อไปนี้^๒เป็นเท็จ

$1. 7ab(2a - 5) = 14a^2b - 35ab$

~~$10a^4b - 15a^2b^2 = 5a^2b^2(2a^2 - 3)$~~

$3. -2a(a - b^2 + 4) = 2ab^2 - 2a^2 - 8a$

$4. 5a^2b(2a - 3ab + 4c) = 10a^3b - 15a^3b^2 + 20a^2bc$

4. ข้อใดต่อไปนี้^๒ถูกต้อง

$1. (x + y) - 3b(x + y) = (x + y)(3b)$

$2. (x - y) + 5a(x - y) = (x + y)(5a)$

~~$3(x + y) + 4a(x + y) = (x + y)(3 + 4a)$~~

$4. 5(x + y) - 3b(x + y) = (5x + 5y)(3ab - 36y)$

5. แยกตัวประกอบของ $a^2 + 6a - 91$ ได้เท่ากับข้อใด

$1. (a - 13)(a - 7) \quad (a+13)(a-7)$

$2. (a - 13)(a + 7)$

~~$(a + 13)(a - 7)$~~

$4. (a + 13)(a + 7)$

6. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $98 - 7x - x^2$

$1. (14 - x)(7 - x)$

$3. (14 + x)(7 + x)$

~~$(14 + x)(7 - x)$~~

$4. (14 - x)(7 + x)$

7. $6x^2 - 11x - 10$ แยกตัวประกอบได้ดังนี้

~~$(2x - 5)(3x + 2)$~~

$3. (2x + 2)(3x - 5)$

$2. (2x + 5)(3x - 2)$

$4. (2x - 2)(3x - 5)$

8. ถ้าแยกตัวประกอบของ $ax^2 + bx + c$ ได้เป็น $(4x - 7)(4x + 7)$ แล้วค่าของ a, b และ c มีค่าเท่าใด

$$(4x)^2 - 7^2 = 16x^2 - 49$$

1. $a = 16, b = 0, c = 49$

~~2. $a = 16, b = 0, c = -49$~~

3. $a = 16, b = -56, c = 49$

4. $a = 16, b = 56, c = -49$

9. ถ้า $81x^2 - 18x + A$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์แล้ว จำนวน A มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 16 $(9x)^2 - 2(9x)(1) + 1^2$

3. 4

~~2. 1~~

10. ถ้า $x^2 + kx + 6 = (x + 2)(x + 3)$ แล้ว k มีค่าเท่าใด

1. 2

2. 3 $x^2 + 5x + 6$

~~5~~

4. 6

11. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $a^2x + abx + ac + aby + b^2y + bc$

1. $(a + b)(a + bx + cy)$

2. $(x + y)(a + b + c)$

~~3. $(a + b)(ax + by + c)$~~

4. $(a + x)(b + c + y)$

12. ข้อใดเป็นตัวประกอบของ $3x^3 - x^2 - 18x + 6$

~~1. $3x - 1$~~

2. $x + 6$

3. $3x - 2$

4. $x - 6$

13. ถ้า $(x + 1)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $x^3 + 2x^2 - x - 2$ แล้ว ตัวประกอบอีก 2 ตัวที่เหลือคือข้อใด

1. $(x + 1)(x - 2)$

~~2. $(x - 1)(x + 2)$~~

3. $(x + 1)(x + 2)$

4. $(x - 1)(x - 2)$

14. $2x + 5$ เป็นตัวประกอบของพหุนามใด

1. $2x^3 - 3x^2 + 12x - 20$

~~2. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$~~

3. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$

4. $2x^3 + 3x^2 - 12x - 20$

15. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $x^2 - 20x + 40$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. $(x - 5)(x - 8)$

2. $(x - 20)(x + 2)$

3. $(x - 8\sqrt{15})(x - 12\sqrt{15})$

~~4. $(x - 10 + 2\sqrt{15})(x - 10 - 2\sqrt{15})$~~

16. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบ $x^7 - 81x^3$

1. $x^3(x^2 + 9)(x^2 - 9)$

2. $x^3(x^2 + 27)(x^2 - 3)$

3. $x^3(x^2 + 3)(x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2})$

~~4. $x^3(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$~~

17. ถ้า $(x + 1)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $x^3 + 2x^2 - x - 2$ แล้ว ตัวประกอบอีก 2 ตัวที่เหลือคือข้อใด

1. $(x + 1)(x - 2)$

~~2. $(x - 1)(x + 2)$~~

3. $(x + 1)(x + 2)$

4. $(x - 1)(x - 2)$

18. $2x + 5$ เป็นตัวประกอบของพหุนามใด

1. $2x^3 - 3x^2 + 12x - 20$

~~2.~~ $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$

3. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$

4. $2x^3 + 3x^2 - 12x - 20$

19. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $x^2 - 20x + 40$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. $(x - 5)(x - 8)$

2. $(x - 20)(x + 2)$

3. $(x - 8\sqrt{15})(x - 12\sqrt{15})$

~~4.~~ $(x - 10 + 2\sqrt{15})(x - 10 - 2\sqrt{15})$

20. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบ $x^7 - 81x^3$

1. $x^3(x^2 + 9)(x^2 - 9)$

2. $x^3(x^2 + 27)(x^2 - 3)$

3. $x^3(x^2 + 3)(x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2})$

~~4.~~ $x^3(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$

ข้อ 17-20 ข้อ 13-16

$$\begin{aligned}
 (12) \quad P\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 18\left(\frac{1}{3}\right) + 6 \\
 &= 3\left(\frac{1}{27}\right) - \frac{1}{9} - 6 + 6 \\
 &= \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - 6 + 6
 \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$\begin{array}{r}
 (13) \quad \begin{array}{r}
 x+1 \overline{) \begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 - x - 2 \\
 \underline{x^3 + x^2} \\
 x^2 - x - 2 \\
 \underline{x^2 + x} \\
 -2x - 2 \\
 \underline{-2x - 2} \\
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x+1)(x^2 + x - 2) \\
 &= (x+1)(x+2)(x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \text{अंश 1} &\Rightarrow P\left(-\frac{5}{2}\right) = 2\left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 12\left(-\frac{5}{2}\right) - 20 \\
 &= 2\left(-\frac{125}{8}\right) - 3\left(\frac{25}{4}\right) - \frac{60}{2} - 20 \\
 &= -\frac{125}{4} - \frac{75}{4} - 30 - 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अंश 2} &\Rightarrow P\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{4} - \frac{75}{4} + 30 + 20 \\
 &= -\frac{200}{4} + 50 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$(15) \quad x^2 - 20x + 40 = x^2 - 2(x)(10) + 10^2 - 10^2 + 40$$

$$= (x-10)^2 - 60$$

$$= (x-10)^2 - (2\sqrt{15})^2$$

$$= (x-10+2\sqrt{15})(x-10-2\sqrt{15}) \quad \#$$

$$(16) \quad x^7 - 81x^3 = x^3(x^4 - 81)$$

$$= x^3((x^2)^2 - 9^2)$$

$$= x^3(x^2 - 9)(x^2 + 9)$$

$$= x^3(x-3)(x+3)(x^2+9)$$

~~1/27~~